Кинетичка енергија крутог тела

У сопственом систему референције кин. енергија крутог ела једнака је нули. У односу на лабораторијски је

$$T^{(0)} = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha(\vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{\rho}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\Big(\underset{\substack{\parallel\\ m}}{\sum_\alpha m_\alpha}\Big)v_A^2 + \sum_\alpha m_\alpha\vec{v}_A\cdot(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_\alpha) + \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_\alpha)^2$$

$$T^{(0)} = \frac{1}{2} m v_A^2 + m\vec{v}_A(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_c) + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_\alpha)^2}_{\text{ротациона кинетичка енергија}}$$

$$T^{rot} = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_\alpha)\cdot(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_\alpha) = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha\vec{\omega}\,[\vec{\rho}_\alpha\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_\alpha)] =$$

→ користи се особина да је $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$

$$= \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\sum_\alpha m_\alpha[\vec{\rho}_\alpha\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_\alpha)] =$$

$$\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\Big[\sum_\alpha m_\alpha\rho_\alpha^2\vec{\omega} - \sum_\alpha m_\alpha\vec{\rho}_\alpha(\vec{\rho}_\alpha\cdot\vec{\omega})\Big] = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\Big[\Big(\sum_\alpha m_\alpha\rho^2\Big)\mathcal{E} - \sum_\alpha\{m_\alpha\vec{\rho}_\alpha,\vec{\rho}_\alpha\}\Big]\vec{\omega}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\mathcal{J}^{(A)}\cdot\vec{\omega}$$

Ако јединични вектор угаоне брзине крутог тела (јединични ектор тренутне осе ротације која пролази кроз A) означи- о са $\vec{u}$ имаћемо

$$T^{rot} = \frac{1}{2}\omega\vec{u}\cdot\mathcal{J}^{(A)}\cdot\omega\vec{u} = \underline{\underline{\frac{1}{2}I_{uu}^{(A)}\omega^2}}$$

Након тога је

$$\boxed{T^{(0)} = \frac{1}{2}m v_A^2 + m\vec{v}_A\cdot(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_c) + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\mathcal{J}^{(A)}\cdot\vec{\omega}}$$

кинетичка енергија транслаторног кретања

Кинетичка енергија коју тело има услед спреге између транслације и ротације (једнак је нули ако је сопствени систем смештен у ц. м.)

Кинетичка енергија ротационог око осе која пролази кроз пол сопственог триједра

Теорема импулса за круто тело

Теорема импулса $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{K}^{ext}$ (уз узимање у обзир да је за круто тело $\vec{P}(0) = m(\vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{\rho}_c) = m\vec{v}_c$) за круто тело у лабораторијском систему референције поприма облик

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{K}^{ext}}$$

$\vec{K}^{ext}$ је резултанта свих спољашњих активних сила и свих пољашњих реакција.

Теорема момента импулса за круто тело

$$\boxed{\left(\frac{d\vec L^{(0)}}{dt}\right)_0 = \vec M^{ext}_{(0)}} \qquad (x)$$

где је

$$\boxed{\vec M^{ext}_{(0)} = \sum_\alpha \vec r_\alpha \times \vec K^{ext} = \sum_\alpha (\vec r_A + \vec\rho_\alpha)\times \vec K^{ext} = \vec r_A \times \vec K^{ext} + \vec M_{(A)}}$$

резултујући момент свих спољашњих активних сила и спољашњих реакција у односу на пол O лабораторијског система референце. Индекс A у последњем изразу показује да се резултујући момент рачуна у односу на пол A сопственог система референце

Члан на левој страни једначине може се написати на следећи начин: (водећи рачуна да је $L^{(0)} = m\vec r_A \times \vec v_C + m\vec\rho_C \times \vec v_A + J^{(A)}\cdot\vec\omega$)

$$\left(\frac{dL^{(0)}}{dt}\right)_0 = \left[\frac{d}{dt}(m\vec r_A\times\vec v_C)\right]_0 + \left[\frac{d}{dt}(m\vec\rho_C\times\vec v_A)\right]_0 + \left[\frac{d}{dt}\left(J^{(A)}\cdot\vec\omega\right)\right]_0 =$$

$$= m\vec v_A\times\vec v_C + m\vec r_A\times\frac{d\vec v_C}{dt} + m\underbrace{\left(\frac{d\vec\rho_C}{dt}\right)_0\times\vec v_A} + m\vec\rho_C\times\frac{d\vec v_A}{dt} + \left[\frac{d}{dt}\left(J^{(A)}\cdot\vec\omega\right)\right]_0$$

$\vec v_C = \vec v_A + \vec\omega\times\vec\rho_C$

$$m\frac{d\vec v_C}{dt} = \vec K^{ext}$$

$$-m\vec v_A\times\left(\frac{d\vec\rho_C}{dt}\right)_0 = \text{кориолисова т.}$$

$$= -m\vec v_A\times\left[\overset{\to 0}{\left(\frac{d\vec\rho_C}{dt}\right)_A} + \vec\omega\times\vec\rho_C\right]$$

→ јер се $\vec\rho_C$ не пом. мења у одн. на A

$\vec v_A\times\vec v_A = 0$

$$\left(\frac{d\vec L^{(0)}}{dt}\right)_0 = \cancel{m\vec v_A\times(\vec v_A+\vec\omega\times\vec\rho_C)} + \vec r_A\times\vec K^{ext} - \cancel{m\vec v_A\times(\vec\omega\times\vec\rho_C)} + m\vec\rho_C\times\frac{d\vec v_A}{dt} + \left[\frac{d}{dt}\left(J^{(A)}\cdot\vec\omega\right)\right]_0 =$$

$$= \vec r_A\times\vec K^{ext} + m\vec\rho_C\times\frac{d\vec v_A}{dt} + \left[\frac{d}{dt}\left(J^{(A)}\cdot\vec\omega\right)\right]_0$$

Убацимо ову једначину и (xx) у (x):

$$\cancel{\vec r_A\times\vec K^{ext}} + m\vec\rho_C\times\frac{d\vec v_A}{dt} + \left[\frac{d}{dt}\left(J^{(A)}\cdot\vec\omega\right)\right]_0 = \cancel{\vec r_A\times\vec K^{ext}} + \vec M^{ext}_{(A)}$$

$$\boxed{\left[\frac{d}{dt}\left(J^{(A)}\cdot\vec\omega\right)\right]_0 = \vec M^{ext}_{(A)} - m\vec\rho_C\times\frac{d\vec v_A}{dt}}$$

Ова јна и теорема импулса $m\frac{d\vec v_C}{dt} = \vec K^{ext}$ дају шест скаларних једначина (колико има степени слободе). Пошто се укупни импулс и момент импулса могу изразити као линеарне функције временских извода генералисаних координата крутог тела, у горњим једначинама фигуришу највише други изводи генералисаних координата по времену, тако да се ове једначине могу третирати као диференцијалне једначине кретања крутог тела.

Из једначина

$$m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{K}^{ext}$$

$$\left(\frac{d\vec{L}^{(0)}}{dt}\right)_0 = \vec{M}^{ext}_{(0)}$$

се види да је за описивање кретања крутог тела и његово разлагање на транслаторно и ротационо кретање могуће разликовати случајеве (уколико се за пол A одабере ц.м.)

1. $\vec{K}^{ext}\neq 0$, $\vec{M}^{ext}=0$ - к.тело се креће транслаторно, ако у почетном тренутку није ротирало око осе која пролази кроз ц.м. (Ако је у поч. тренутку имало угаону брзину она се одржава.)

2. $\vec{K}^{ext}\overset{\text{резултанта} = 0}{=0}$, $\vec{M}\neq 0$, к. тело ротира са угаоним убрзањем око тренутне осе која пролази кроз центар маса, а центар маса мирује или се креће константном брзином

3. $\vec{K}^{ext}\neq 0$, $\vec{M}\neq 0$ - центар маса се креће убрзано и тело ротира са угаоним убрзањем око центра маса

Уколико је круто тело у равнотежи, резултанта свих сила и свих момената сила у односу на пол морају бити једнаке нули.

Кретање крутог тела око непокретне осе :

Принудно кретање крутог тела при коме су две тачке фиксиране („лежишта" осе). Ове тачке дефинишу осу око које се тело креће и чије су све тачке непокретне. Уобичајено је једну од тачака на оси одабрати за пол лабораторијског и сопственог триједра. (z лабораторијског ζ сопственог). Овакав избор триједара нам омогућује да одмах ставимо $x_A(t)=0$, $y_A(t)=0$, $z_A(t)=0$, $\theta(t)=0$. Што значи да ће се у једначинама које повезују јединичне векторе са у лаб. и сопств. систему и угаоне брзине у ова два тено. јавља комбинација углова $\psi+\varphi$. Међутим можемо ставити $\varphi=0$ и сматрати да се лабораторијски триједар преводи у сопствени једном ротацијом, тако да је кретање крутог тела око фиксне осе одређено само ијом времена $\psi=\psi(t)$ а осталих пет координата је еднако нули.

У овом случају теорема момента импулса гласи

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\mathcal{J}^{(A)}\cdot\vec{\omega}\right)\right]_0 = \vec{M}^{ext}_{(A)}$$

Израчунајмо најпре $J^{(A)}\cdot\vec{\omega}$

$$J^{(A)}\cdot\vec{\omega} = \begin{pmatrix} I^{(A)}_{\xi\xi} & I^{(A)}_{\xi\eta} & I^{(A)}_{\xi\zeta} \\ I^{(A)}_{\eta\xi} & I^{(A)}_{\eta\eta} & I^{(A)}_{\eta\zeta} \\ I^{(A)}_{\zeta\xi} & I^{(A)}_{\zeta\eta} & I^{(A)}_{\zeta\zeta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^{(A)}_{\xi\xi} & I^{(A)}_{\xi\eta} & I^{(A)}_{\xi\zeta} \\ I^{(A)}_{\eta\xi} & I^{(A)}_{\eta\eta} & I^{(A)}_{\eta\zeta} \\ I^{(A)}_{\zeta\xi} & I^{(A)}_{\zeta\eta} & I^{(A)}_{\zeta\zeta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ \dot{\psi}\end{pmatrix}$$

Након матричног множења добија се:

$$J^{(A)}\cdot\vec{\omega} = I^{(A)}_{\xi\zeta}\dot{\psi}\vec{e}_{\xi} + I^{(A)}_{\eta\zeta}\dot{\psi}\vec{e}_{\eta} + I^{(A)}_{\zeta\zeta}\dot{\psi}\vec{e}_{\zeta}$$

Приликом диференцирања овог израза по времену добија се (водећи рачуна о томе да је $\left(\frac{d\vec{e}_i}{dt}\right) = \vec{\omega}\times\vec{e}_i$ и да се $\vec{e}_\zeta$ не мења са временом тј. да је колинеаран са $\vec{\omega}$):

$$I^{(A)}_{\xi\zeta}\ddot{\psi}\vec{e}_{\xi} + I^{(A)}_{\eta\zeta}\ddot{\psi}\vec{e}_{\eta} + I^{(A)}_{\zeta\zeta}\ddot{\psi}\vec{e}_{\zeta} + I^{(A)}_{\xi\zeta}\dot{\psi}(\vec{\omega}\times\vec{e}_{\xi}) + I^{(A)}_{\eta\zeta}\dot{\psi}(\vec{\omega}\times\vec{e}_{\eta}) = \vec{M}^{ext}_{(A)}$$

Помножимо скаларно ову једначину са $\vec{e}_\zeta$ тако да се добија

$$\boxed{I^{(A)}_{\zeta\zeta}\ddot{\psi} = \vec{M}^{ext}_{(A)}\cdot\vec{e}_{\zeta}}$$

- диференцијална ј-на кретања крутог тела око непокретне осе

($I^{(A)}_{\zeta\zeta}$ је момент инерције рачунат управо у односу на ту осу) $\vec{M}^{ext}_{(A)}$ је резултујући момент свих спољашњих активних сила и свих спољ. реакција

$$\vec{M}^{ext}_{(A)} = \sum_{\alpha}\vec{\rho}_{\alpha}\times\vec{K}^{ext} = \sum_{\alpha}\vec{\rho}_{\alpha}\times\vec{F}^{ext}_{\alpha} + \sum_{\alpha}\vec{\rho}_{\alpha}\times\vec{R}^{ext}_{\alpha}$$

(спољашње реакције се јављају као последица деловања механизама веза који обезбеђују да лежишта осе остају непокретна) Ако непокретне тачке обележимо са B и B':

$$\vec{M}^{ext}_{(A)} = \sum_{\alpha}\vec{\rho}_{\alpha}\times\vec{F}^{ext}_{\alpha} + \vec{\rho}_{B}\times\vec{R}^{ext}_{B} + \vec{\rho}_{B'}\times\vec{R}^{ext}_{B'} =$$

$$= \sum_{\alpha}\vec{\rho}_{\alpha}\times\vec{F}^{\alpha}_{ext} + \overline{AB}\,\vec{e}_{\zeta}\times\vec{R}^{ext}_{B} + \overline{AB'}\,\vec{e}_{\zeta}\times\vec{R}^{ext}_{B'}$$

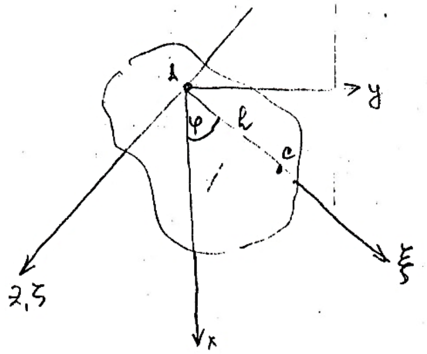
Ако помножимо горњу ј-ну скаларно са $\vec{e}_\zeta$ остаје

$$\vec{M}^{ext}_{(A)}\cdot\vec{e}_{\zeta} = \left(\sum_{\alpha}\vec{\rho}_{\alpha}\times\vec{F}^{ext}_{\alpha}\right)\cdot\vec{e}_{\zeta}$$

Из диф. ј-не кретања крутог тела око непомичне осе види се да маси при транслаторном кретању одговара момент инерције при ротационом кретању (дакле момент инерције представља меру отпора који тело пружа својој промени стања свога кретања при ротационом кретању. Сили при транслаторном кретању одговара момент силе у односу на осу ротације при ротационом кретању.

Физичко клатно

Круто тело које се може обртати без трења око непомичне хоризонталне осовине у хомогеном пољу Земљине теже при чему ова оса не пролази кроз центар маса.



Подесно је осове об. триједра сместити у ону тачку осе обртања у којој ту осу сече вертикална раван која пролази кроз ц.м. Ако се x оса оријентише верт. наниже а ξ повуче кроз ц.м. тако да је $\vec{\rho}_c = l\vec{e}_\xi$ где је l растојање ц.м. од осе обртања добија се

$$\sum_\alpha \vec{\rho}_\alpha \times \vec{F}^{ext}_\alpha = \sum_\alpha \vec{\rho}_\alpha \times (m_\alpha g \vec{e}_x) = -g\vec{e}_x \times \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \vec{\rho}_\alpha}_{m\vec{\rho}_c} = -mg\vec{e}_x \times \vec{\rho}_C =$$

$$= -mgl(\vec{e}_x \times \vec{e}_\xi)$$

тако да је

$$(\vec{M}^{ext}_{(A)} \cdot \vec{e}_\zeta) = (\sum_\alpha \vec{\rho}_\alpha \times \vec{F}^{ext}_\alpha) \cdot \vec{e}_\zeta = -mgl(\vec{e}_x \times \vec{e}_\xi)\vec{e}_\zeta =$$

$$= -mgl\,\vec{e}_x \cdot (\underbrace{\vec{e}_\xi \times \vec{e}_\zeta}_{-\vec{e}_\eta}) = mgl(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\eta)$$

Из $\theta = 0$, $\varphi = 0$ је $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\eta = -\sin\psi$ тако да је:

$$(\vec{M}^{ext}_{(A)} \cdot \vec{e}_\zeta) = -mgl\sin\psi$$

Након овога диференцијонна једначина кретања крутог тела око фиксне осе у размотреном случају добиа облик:

$$I^{(A)}_{\zeta\zeta}\ddot{\psi} = -mgl\sin\psi \Rightarrow \boxed{\ddot{\psi} + \frac{mgl}{I^{(A)}_{\zeta\zeta}}\sin\psi = 0}$$

Ова јна је еквивалентна једначини $\ddot{\varphi} + \frac{g}{R}\sin\varphi = 0$ код математичког клатна. Величина $R^* = \frac{I^{(A)}_{\zeta\zeta}}{ml}$ је днакотна дужини математичког клатна и назива се редукована дужина физичког клатна.

У случају осцилаторног кретања период осцилације одређен је обрасцем

$$\boxed{\tau = 2\pi\sqrt{\frac{I^{(A)}_{\zeta\zeta}}{mgl}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)k^4 + \dots\right]} \quad k = \sin\frac{\alpha}{2}$$

α- максимална вредност амплитуде

за α мало

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{I^{(A)}_{\zeta\zeta}}{mgl}}$$

Кретање крутог тела око непокретне тачке

Чигра - круто тело које се креће тако да му је једна тачка утврђена. Најцелисходније је ту тачку узети за пол и лабораторијског и сопственог триједра, а за осе сопственог триједра узети главне осе инерције у односу на тај пол. Тада је $x_A=0$, $y_A=0$, $z_A=0$ тако да треба одредити $\psi(t)$, $\theta(t)$ и $\varphi(t)$. У том случају теорема момента импулса за круто тело се своди на:

$$\left[\frac{d}{dt}(\mathcal{J}^{(A)}\cdot\vec{\omega})\right]_0 = \vec{M}^{ext}_{(A)} - m\cancel{\vec{\rho}_e \times \frac{d\vec{v}_A}{dt}}^{\,=0} \quad \text{јер је } \vec{v}_A=0$$

Овде је

$$\mathcal{J}^{(A)}\cdot\vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_1^{(A)} & 0 & 0 \\ 0 & I_2^{(A)} & 0 \\ 0 & 0 & I_3^{(A)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} = I_1^{(A)}\omega_1\vec{e}_\xi + I_2^{(A)}\omega_2\vec{e}_\eta + I_3^{(A)}\omega_3\vec{e}_\zeta$$

где су ω_1, ω_2 и ω_3 пројекције угаоне брзине на главне осе инерције к. т. на фиксирану тачку (индексима 1, 2, 3 је наглашено да је реч о пројекцијама угаоне брзине на главне осе инерције у односу на фиксирану тачку. Диференцирањем по времену (уз $\frac{d\vec{e}_i}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{e}_i$) добија се:

$$\left[\frac{d}{dt}(\mathcal{J}^{(A)}\cdot\vec{\omega})\right]_0 = I_1^{(A)}\dot{\omega}_1\vec{e}_\xi + I_2^{(A)}\dot{\omega}_2\vec{e}_\eta + I_3^{(A)}\dot{\omega}_3\vec{e}_\zeta + I_1^{(A)}\omega_1(\vec{\omega}\times\vec{e}_\xi) + I_2^{(A)}\omega_2(\vec{\omega}\times\vec{e}_\eta) + I_3^{(A)}\omega_3(\vec{\omega}\times\vec{e}_\zeta)$$

уз $\vec{\omega} = \omega_1\vec{e}_\xi + \omega_2\vec{e}_\eta + \omega_3\vec{e}_\zeta$ и

$$\vec{\omega}\times\vec{e}_\xi = \omega_3\vec{e}_\eta - \omega_2\vec{e}_\zeta\,;\quad \vec{\omega}\times\vec{e}_\eta = \omega_1\vec{e}_\zeta - \omega_3\vec{e}_\xi\,;\quad \vec{\omega}\times\vec{e}_\zeta = \omega_2\vec{e}_\xi - \omega_1\vec{e}_\eta$$

добија се:

$$\left[\frac{d}{dt}(\mathcal{J}^{(A)}\cdot\vec{\omega})\right]_0 = \left[I_1^{(A)}\dot{\omega}_1 - (I_2^{(A)}-I_3^{(A)})\omega_2\omega_3\right]\vec{e}_\xi + \left[I_2^{(A)}\dot{\omega}_2 - (I_3^{(A)}-I_1^{(A)})\omega_3\omega_1\right]\vec{e}_\eta + \left[I_3^{(A)}\dot{\omega}_3 - (I_1^{(A)}-I_2^{(A)})\omega_1\omega_2\right]\vec{e}_\zeta$$

Након тога пројектовањем на осе сопственог триједра добија се:

$$\boxed{\begin{aligned} I_1^{(A)}\dot{\omega}_1 - (I_2^{(A)}-I_3^{(A)})\omega_2\omega_3 &= (\vec{H}^{ext}_{(A)}\cdot\vec{e}_\xi) \\ I_2^{(A)}\dot{\omega}_2 - (I_3^{(A)}-I_1^{(A)})\omega_3\omega_1 &= (\vec{M}^{ext}_{(A)}\cdot\vec{e}_\eta) \\ I_3^{(A)}\dot{\omega}_3 - (I_1^{(A)}-I_2^{(A)})\omega_1\omega_2 &= (\vec{M}^{ext}_{(A)}\cdot\vec{e}_\zeta) \end{aligned}}$$

- диференцијалне једначине кретања чигре. (Ојлерове диференцијалне једначине)

(добијене ј-не су диф. ј-не за одређивање Ојлерових углова - може се показати, експлицитним писањем израза за угаону брзину, да су ове ј-не другог реда, да су линеарне по $\ddot{\psi}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{\varphi}$ и да се по њима могу решити тако да принцип класичне каузалности није нарушен увођењем Ојлерових углова.)

колико су познате активне силе и почетни услови из ових дначина могу се наћи решења у облику $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$ и $= \varphi(t)$. За чигру у хомогеном пољу З. теже (тешка чи- а) позната су три проблема у којима се посматране не могу интегрисати:

а) <u>Ојлеров проблем</u> (тешка чигра утврђена у ц.м. тако е је момент сила З. теже у односу на утврђену тачку еднак нули, елипсоид инерције произвољан)

б) <u>Лагранжев проблем</u> (елипсоид инерције тешке чигре у н. на утврђену тачку је ротациони, ц.м. се налази на
динамичке симетрије
утврђеним врхом. чигре) - нпр. тешка симетрична чигра

в) <u>Проблем Софије Ковалевске</u> (елипсоид инерције у односу утврђену тачку је ротациони, важи $I_1 = I_2 = 2I_3$, ц.м. налази у екваторијалној равни елипсоида)

<u>Ојлеров проблем кретања чигре</u>

Задржаћемо се на специјалном случају када је круто ло динамички симетрично у односу на ζ осу, тј. када $I_1 = I_2$. Чигра се налази у хомогеном пољу Земљине теже утврђена у центру маса. Тада је

$$\vec{M}^{ext}_{(A)} = \sum_{\alpha} \vec{\rho}_\alpha \times \vec{F}^{ext}_\alpha = \sum_{\alpha} \vec{\rho}_\alpha \times (m_\alpha \vec{g}) = -\vec{g} \times \sum_{\alpha} m_\alpha \vec{\rho}_\alpha = -\vec{g} \times \vec{\rho}_c = 0$$

У утврђеној тачки је координатни почетак сопственог система а у тој тачки је и ц.м. тако да је $\vec{\rho}_c = 0$)

У том случају Ојлерове једначине гласе

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_1 - I_3)\omega_2 \omega_3 = 0$$

$$I_1 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3 \omega_1 = 0$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega_3 = c = const.$$

Уношењем резултата последње ј-не у прву и диференцирањем прве ј-не добија се

$$I_1 \ddot{\omega}_1 - (I_1 - I_3) c \dot{\omega}_2 = 0$$

Из друге ј-не је $\dot{\omega}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_1 c$ тако да је

$$\ddot{\omega}_1 = \frac{I_1 - I_3}{I_1} c \frac{I_3 - I_1}{I_1} c \omega_1 = -\left(\frac{I_3 - I_1}{I_1}\right)^2 c^2 \omega_1$$

Односно:

$$\ddot{\omega}_1 + k^2 \omega_1 = 0 \quad , \quad k = c\,\frac{I_3 - I_1}{I_1}.$$

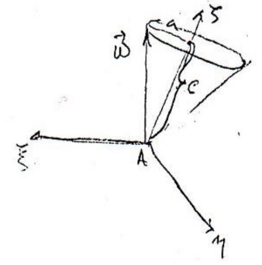
Један партикуларни интеграл ове ј-не је

$$\omega_1 = a \cos kt$$

а из прве ј-не је

$$\omega_2 = \frac{I_1 \dot{\omega}_1}{c(I_1 - I_3)} = -\frac{I_1 a k}{c(I_1 - I_3)} \sin kt = a \sin kt$$

Према томе закључујемо да је пројекција угаоне брзине на ζ осу стална величина а на $\xi A\eta$ раван описује круг полупречника a са кружном фреквенцијом k. Кретање је такве природе да угаона брзина равномерно ротира око осе симетрије крутог тела – *регуларна прецесија*. (Такав случај је при ротацији Земље око се дејство других сила занемари јер се угаона брзина Земље не поклапа са њеном осом симетрије већ ротира око ње) – брзином $\dot{\varphi}$.

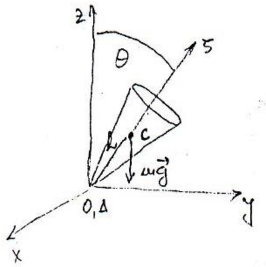


Посматрано из лабораторијског система референце и оса динамичке симетрије и тренутна оса ротације ротирају константном угаоном брзином ψ око z-осе.

Лагранжев проблем чигре

Треба да су испуњени услови:

1) Чигра је у хомогеном пољу Земљине теже
2) Елипсоид инерције за фиксирану тачку је ротациони $(I_1 = I_2 \neq I_3)$ тако да чигра поседује осу динамичке симетрије
3) Центар маса чигре налази се на оси динамичке симетрије



Фиксирана тачка се одабере за пол и лабораторијског и сопственог система референце. ζ-оса се одабере тако да се подудара са осом динамичке симетрије чигре.

$$\vec{\rho}_c = h\,\vec{e}_\zeta$$

Резултујући момент спољашњих активних сила је

$$\vec{M}^{ext}_{(A)} = \sum_\alpha \vec{\rho}_\alpha \times \vec{F}^{ext}_\alpha = \sum_\alpha \vec{\xi}_\alpha \times (-m_\alpha g \vec{e}_z) = -g\,\underbrace{\Big(\sum_\alpha m_\alpha \vec{\xi}_\alpha\Big)}_{m\vec{\rho}_c} \times \vec{e}_z = -mgh\,\vec{e}_\zeta \times \vec{e}_z$$

$$\vec{M}^{ext}_{(A)} = mgh\,\vec{e}_z \times \vec{e}_\zeta$$

Пројекције овог момента (које треба унети у Ојлерове ј-не) на осе сопственог триједра су:

$$(\vec{M}^{ext}_{(A)} \cdot \vec{e}_\xi) = mgh\,(\vec{e}_z \times \vec{e}_\zeta)\cdot\vec{e}_\xi - mgh\,\vec{e}_z\cdot\underbrace{(\vec{e}_\zeta \times \vec{e}_\xi)}_{\vec{e}_\eta} = mgh\,\vec{e}_z\cdot\vec{e}_\eta =$$

$$= mgh\cos\varphi\sin\theta$$

$$(\vec{M}^{ext}_{(A)} \cdot \vec{e}_\eta) = mgh\,\vec{e}_z\cdot\underbrace{(\vec{e}_\zeta \times \vec{e}_\eta)}_{-\vec{e}_\xi} = -mgh\sin\varphi\sin\theta$$

$$(M^{ext}_{(A)} \cdot \vec{e}_\zeta) = mgh\,(\vec{e}_z \times \vec{e}_\zeta)\cdot\vec{e}_\zeta = 0$$

$$\vec{e}_\eta = (-\sin\psi\cos\varphi - \dots)\vec{e}_x + \dots \vec{e}_y + \cos\varphi\sin\theta\,\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\xi = \dots\vec{e}_x + \dots e_y + \sin\varphi\sin\theta\,\vec{e}_z$$

[illegible] [illegible] Ојлерове ј-не (уз $I_1 = I_2$) [illegible]

$$\boxed{\begin{aligned} I_1\dot\omega_1 - (I_1 - I_3)\omega_2\omega_3 &= \vec{M}^{ext}_{(A)}\cdot\vec{e}_\xi = mgh\cos\varphi\sin\theta \\ I_1\dot\omega_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= \vec{M}^{ext}_{(A)}\cdot\vec{e}_\eta = -mgh\sin\varphi\sin\theta \\ I_3\dot\omega_3 &= 0 \end{aligned}}$$

Из треће ј-не се добија $\boxed{\omega_3 = const = \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta}$ (*)

Ако прву ј-ну помножимо са ω_1 а другу са ω_2 па се саберу добија се:

$$\underbrace{I_1(\omega_1\dot\omega_1 + \omega_2\dot\omega_2)}_{\frac{d}{dt}\left[I_1\left(\frac{1}{2}\omega_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2\right)\right]} = mgh\sin\theta(\omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi) = \underbrace{mgh\dot\theta\sin\theta}_{-\frac{d}{dt}(mgh\cos\theta)}$$

$\omega_1 = \dot\theta\cos\varphi + \dot\psi\sin\theta\sin\varphi$

$\omega_2 = -\dot\theta\sin\varphi + \dot\psi\sin\theta\cos\varphi$

$\omega_3 = \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta$

$\Rightarrow \omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi =$

$\dot\theta\cos^2\varphi + \dot\psi\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi +$

$+ \dot\theta\sin^2\varphi - \dot\psi\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi$

$\dot\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \dot\theta$

односно

$$\frac{d}{dt}\left[I_1\left(\frac{1}{2}\omega_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2\right)\right] = -\frac{d}{dt}(mgh\cos\theta) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + mgh\cos\theta\right] = 0$$

Одавде је

$$\frac{1}{2}I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + mgh\cos\theta = E - \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 \quad (E \text{ је укупна мех. ен.})$$

Ово је интеграл енергије. Ако заменимо ω_1^2 и ω_2^2 (са) добија се

$$\boxed{\frac{1}{2}I_1(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\sin^2\theta) + mgh\cos\theta = E - \frac{1}{2}I_3\omega_3^2} \quad (**)$$

На овај начин добијена су прва два интеграла (*) и (**) Ојлерових једначина. Трећи интеграл добијамо тако што се прва једначина полазног система Ојлерових ј-на помножи са $\sin\varphi$ а друга са $\cos\varphi$ па се тако добијене ј-не саберу:

$$I_1(\dot\omega_1\sin\varphi + \dot\omega_2\cos\varphi) - (I_1 - I_3)\omega_3(\omega_2\sin\varphi - \omega_1\cos\varphi) = 0 \quad (***)$$

Приметимо:

$$\frac{d}{dt}(\dot\psi\sin^2\theta) = \frac{d}{dt}\left[(\dot\psi\sin\theta)\sin\theta\right] = \sin\theta\frac{d}{dt}(\dot\psi\sin\theta) + \dot\psi\sin\theta\cos\theta\dot\theta =$$

$$= \sin\theta\left[\dot\omega_1\sin\varphi + \dot\omega_2\cos\varphi + \omega_1\cos\varphi\dot\varphi - \omega_2\sin\varphi\dot\varphi\right] + \dot\psi\dot\theta\sin\theta\cos\theta =$$

$$= \sin\theta(\dot\omega_1\sin\varphi + \dot\omega_2\cos\varphi) + \dot\varphi\underbrace{(\omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi)}_{\dot\theta}\sin\theta + \dot\psi\dot\theta\sin\theta\cos\theta =$$

$$= \sin\theta(\dot\omega_1\sin\varphi + \dot\omega_2\cos\varphi) + \dot\varphi\dot\theta\sin\theta + \dot\psi\dot\theta\sin\theta\cos\theta =$$

$$= \sin\theta(\dot\omega_1\sin\varphi + \dot\omega_2\cos\varphi) + \dot\theta\sin\theta\underbrace{(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)}_{\omega_3} =$$

$$= \sin\theta(\dot\omega_1\sin\varphi + \dot\omega_2\cos\varphi) + \dot\theta\sin\theta\,\omega_3$$

$\dot\psi = \frac{1}{\sin\theta}(\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi)$

$\dot\psi\sin\theta = \omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi$

$\frac{d}{dt}(\dot\psi\sin\theta) = \frac{d}{dt}(\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi) =$

$= \dot\omega_1\sin\varphi + \omega_1\dot\varphi\cos\varphi + \dot\omega_2\cos\varphi -$

$- \omega_2\sin\varphi\dot\varphi$

Према томе ако бисмо (***) помножили са $\sin\theta$ добија се:

$$I_1\sin\theta(\dot\omega_1\sin\varphi+\dot\omega_2\cos\varphi)-(I_1-I_3)\,\omega_3\sin\theta\underbrace{(\omega_2\sin\varphi-\omega_1\cos\varphi)}_{-\underbrace{(\omega_1\cos\varphi-\omega_2\sin\varphi)}_{\dot\theta}}=0\Rightarrow$$

$$I_1\sin\theta(\dot\omega_1\sin\varphi+\dot\omega_2\cos\varphi)+(I_1-I_3)\omega_3\sin\theta\,\dot\theta=0$$

односно

$$I_1\sin\theta(\dot\omega_1\sin\varphi+\dot\omega_2\cos\varphi)+I_1\omega_3\sin\theta\,\dot\theta-I_3\omega_3\sin\theta\,\dot\theta=$$

$$\underbrace{I_1\left[\sin\theta(\dot\omega_1\sin\varphi+\dot\omega_2\cos\varphi)+\dot\theta\sin\theta\,\omega_3\right]}_{\frac{d}{dt}(\dot\psi\sin^2\theta)}-\underbrace{I_3\omega_3\sin\theta\,\dot\theta}_{-\frac{d}{dt}(I_3\omega_3\cos\theta)}=0$$

тј.
$$\frac{d}{dt}\left[I_1\dot\psi\sin^2\theta+I_3\omega_3\cos\theta\right]=0$$
односно

$$\boxed{I_1\dot\psi\sin^2\theta+I_3\omega_3\cos\theta=L_z=const}$$

Ово је интеграл z-компоненте момента импулса (што се и могло очекивати јер је $\vec{M}^{ext}_{(A)}$ ортогонално на сталном правцу, z-осу → из $\left(\frac{d\vec{L}^{0}}{dt}\right)_0=\vec{M}^{ext}_{(0)}$ → за $(M^{ext})_z=0\Rightarrow L_z^{(0)}=const$)

Из ове једначине се одреди $\dot\psi=\frac{L_z}{I_1\sin^2\theta}-\frac{I_3\omega_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}$ и то се уврсти у интеграл енергије тако да се елементарно добија диференцијална једначина за $\theta(t)$

$$\boxed{\dot\theta=\sqrt{\frac{2}{I_1}\left(E-\frac{1}{2}I_3\omega_3^2-mgh\cos\theta\right)-\frac{(L_z-I_3\omega_3\cos\theta)^2}{I_1^2\sin^2\theta}}}$$

Ова једначина раздваја променљиве али доводи до Војерштрасовог елиптичког интеграла и решење се не изражава у елементарним функцијама.

Елиптички интеграли

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}\right)dx$$

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}\right)dx$$

не могу се изразити елементарним функцијама.

Ову ј-ну можемо записати и на следећи начин:

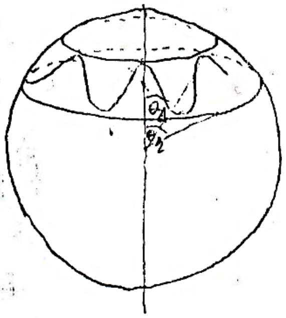
$$\boxed{\dot\theta=\sqrt{\frac{2(E-\frac{1}{2}I_3\omega_3^2)}{I_1}}\sqrt{1-f(\theta)}}$$

где је

$$f(\theta)=\frac{mgh}{E-\frac{1}{2}I_3\omega_3^2}\cos\theta+\frac{L_z}{2I_1(E-\frac{1}{2}I_3\omega_3^2)}\frac{\left(1-\frac{I_3\omega_3}{L_z}\cos\theta\right)^2}{\sin^2\theta}$$

Кретање ће бити могуће само у оном интервалу где је $\sqrt{1-f(\theta)}\geq 0$ тј. где је $f(\theta)\leq 1$ (у противном $\dot\theta$ би било имагинарно што је физички бесмислено. $f(\theta)$ је непрекидна и диференцијабилна у интервалу $(0,\pi)$ и има вертикалне асимптоте за $\theta=0$ и $\theta=\pi$

| том интервалу она мора имати бар један минимум ако да је $f(\theta)<1$ сигурно задовољено у интервалу ілово. $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Према томе динамичка оса отације лагранжеве чигре заклапа са правцем земљине еже угао θ /који осцилује између вредности θ_1 и θ_2. акво кретање динамичке осе је <u>нутација</u> а кретање лочујне чигре је <u>псеудорегуларна прецесија</u>



Ако се θ_1 и θ_2 поклопе псеудорегуларна прецесија прелази у регуларну. У случају да је кинет. енергија чигре много већа од потенцијалне - код чигри које брзо ротирају.

<u>Слободно кретање крутог тела</u>

Код таквог кретања најцелисходније је пол сопственог триједра узети у ц. м. ($\vec{\xi}_c=0$) и за осе овог риједра узмемо главне централне осе инерције. Тада елевантне ј-не постају

$$m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{K}^{ext} \quad ; \quad \left[\frac{d}{dt}\left(J^{(c)}\cdot\vec{\omega}\right)\right]_0 = \vec{M}^{ext}_{(c)}$$

Прва у лабораторијском систему има пројекције

$$\boxed{m\ddot{x}_c = K_x^{ext} \quad , \quad m\ddot{y}_c = K_y^{ext} \quad ; \quad m\ddot{z}_c = K_z^{ext}}$$

и то су диференцијалне једначине за одређивање кретања центра маса у лабораторијском систему референције

Пројектовањем друге на осе сопственог триједра обијају се Ојлерове ј-не за слободну ротацију (ротацију око сопствене осе)

$$\boxed{\begin{aligned} I_1^{(c)}\dot{\omega}_1 - \left(I_2^{(c)} - I_3^{(c)}\right)\omega_2\omega_3 &= \left(\vec{M}^{ext}_{(c)}\cdot\vec{e}_\xi\right) \\ I_2^{(c)}\dot{\omega}_2 - \left(I_3^{(c)} - I_1^{(c)}\right)\omega_3\omega_1 &= \left(\vec{M}^{ext}_{(c)}\cdot\vec{e}_\eta\right) \\ I_3^{(c)}\dot{\omega}_3 - \left(I_1^{(c)} - I_2^{(c)}\right)\omega_1\omega_2 &= \left(\vec{M}^{ext}_{(c)}\cdot\vec{e}_\zeta\right) \end{aligned}}$$

Линеарни хармонијски осцилатор

Хармонијско осциловање - кретање честице под дејством привлачне силе пропорционалне растојању од непокретног центра $\vec{F} = -k\vec{r}$. Може бити линеарно или раванско (једнодимензионално или дводимензионално)

Линеарни хармонијски осцилатор врши просто хармонијско осциловање ако на њега не делују никакве друге силе:

$$\boxed{m\ddot{x} = -k \cdot x} \quad , \quad \boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0} \quad \boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

ω - сопствена фреквенца

Каракт. јна је

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

За комп. бројеве је

$$a = \alpha + i\beta = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$$

Опште решење ове линеарне диференцијалне једначине са константним коефицијентима је:

$$\boxed{x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t}$$

или

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \delta)}$$

$$\boxed{A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \qquad \boxed{tg\,\delta = -\frac{C_2}{C_1}}$$

амплитуда осциловања

почетна фаза осциловања

Константе интеграције могу се одредити из почетних услова $(t = 0,\ x = x_0,\ \dot{x} = \dot{x}_0)$

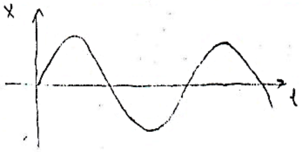
$$x_0 = A\cos\delta$$

$$\dot{x}_0 = -A\omega\sin\delta \qquad tg\,\delta = -\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega} \qquad \delta = arctg\left(-\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega}\right) =$$

$$= arcctg\left(-\frac{x_0\omega}{\dot{x}_0}\right)$$

$$\omega^2 x_0^2 + \dot{x}_0^2 = A^2\omega^2 \Rightarrow A = \frac{1}{\omega}\sqrt{\omega^2 x_0^2 + \dot{x}_0^2}$$

Честица врши осцилаторно кретање по синусном закону између -A и A.



Период осциловања је време за које честица поново доспева у почетни положај или за које се фаза промени за 2π.

$$\omega(t + \tau) + \delta - (\omega t + \delta) = 2\pi \qquad \boxed{\tau = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Видимо да период осциловања не зависи од амплитуде (од почетних услова) - особина изохроности.

Потенцијал хармонијске силе је $U=\frac{1}{2}kv^2=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$

- је укупна енергија хармонијског осцилатора:

$$\boxed{E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2}$$

Пошто су m, ω и A у конкретном случају констан-
е што је $E=\mathrm{const.}$ тако да горња релација изражав
кон одржања механичке енергије (укупна механичка енергија
стема пропорционална је квадрату амплитуде).

Из горње једначине се (дељењем са $\frac{1}{2}m\omega^2A^2$) добија

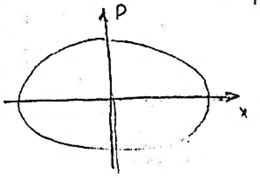
$$\left(\frac{\dot{x}}{\omega A}\right)^2+\left(\frac{x}{A}\right)^2=1$$

или уз $p=m\dot{x}$

$$\frac{x^2}{\frac{2E}{m\omega^2}}+\frac{p^2}{2mE}=1.$$

Одавде закључујемо да је фазна трајекторија
инарног хармонијског осцилатора елипса са полуосама

$a=\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ $\quad b=\sqrt{2mE}$



Линеарни хармонијски осцилатор у отпорној средини

Код отпорних средина може се узети да је сила
тпора пропорционална брзини кретања у односу на
редину (такав случај је када је брзина честице у
дносу на средину мала, знатно мања од брзине звука у
ој средини, а при већим брзинама отпор постаје пропор-
ионалан квадрату брзине). У том случају је

$$\boxed{m\ddot{x}=-kx-r\dot{x}}\ ,\quad \boxed{\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega^2x=0}\quad \boxed{2\beta=\frac{r}{m}\ ,\ \omega^2=\frac{k}{m}}$$

(β карактерише трење; β и ω имају димензије $Hz=s^{-1}$)

- Карактеристична једначина горње једначине је

$$\lambda^2+2\beta\lambda+\omega^2=0 \qquad \lambda_{1,2}=-(\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega^2}$$

тако да у зависности од λ и β можемо разли-
ковати три типа кретања

a) $\underline{\omega>\beta}$ - слабо пригушење. Тада је $\beta^2-\omega^2$ нега-
тивно па је $\lambda_{1,2}=-\beta\pm i\omega^*$; $\omega^*=\sqrt{\omega^2-\beta^2}$

$$x(t)=C_1e^{(-\beta+i\omega^*)t}+C_2e^{(-\beta-i\omega^*t)}\Rightarrow$$

$$x(t)=e^{-\beta t}\left(C_1e^{i\omega^*t}+C_2e^{-i\omega^*t}\right)$$

Пошто је на основу Ојлерове формуле $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$
то је

$$C_1e^{i\omega^*t}+C_2e^{-i\omega^*t}=(C_1+C_2)\cos\omega^*t+i(C_1-C_2)\sin\omega^*t$$

ћи ставрејти:

$$C_1e^{i\omega^*t}+C_2e^{-i\omega^*t}=$$
$$=C_1\cos\omega^*t+iC_1\sin\omega^*t+$$
$$+C_2\cos\omega^*t-iC_2\sin\omega^*t$$

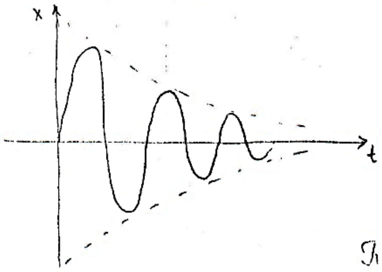
$C_1 + C_2 = A\cos\delta$ $i(C_1 - C_2) = -A\sin\delta$

оначно се добија:

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{-\beta t}\cos\omega^* t + C_2 e^{-\beta t}\sin\omega^* t = A e^{-\beta t}\cos(\omega^* t + \delta)}$$

$$(C_1 + C_2)\cos\omega^* t + i(C_1 - C_2)\sin\omega^* t$$
$$= A\cos\delta\cos\omega^* t - A\sin\delta\sin\omega^* t$$
$$= A\underbrace{(\cos\delta\cos\omega^* t - \sin\delta\sin\omega^* t)}_{\cos(\omega^* t + \delta)}$$

Ово кретање није хармонијско (није ни периодично) т оже се схватити као осциловање са фреквенцом $\omega^* = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$ (није основна фреквенција ω већ је измење а због отпора средине) и амплитудом која се сма ује по експоненцијалном закону $A(t) = Ae^{-\beta t}$. β је оефицијент пригушења



$$\tau^* = \frac{2\pi}{\omega^*} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}$$

је квазипериод - време за које је вредност $\cos(\omega^* t + \delta)$ иста.

Приметимо да је

$$\tau^* = \frac{2\pi}{\omega}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega^2}}} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega^2}}}$$

(где је τ период простог - хармонијског - осциловања)
Уколико је отпор средине мали у поређењу са сила а еластичности то је

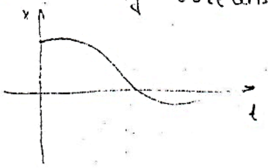
$$\tau^* = \tau\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2 - \dots\right]$$ - отпор средине повећава период осциловања честице и то пропорц. квадрату односа $\frac{\beta}{\omega}$

$$(1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 \mp \dots$$

б) <u>$\omega < \beta$ - јако пригушење</u>. Тад је $\beta^2 - \omega^2 > 0$ па су оба решења $\lambda_{1,2}$ реална и негативна (β је веће од нуле па је $\beta > \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$ тј $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2} < 0$). У том случају је решење

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2})t} + C_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2})t}}$$

Ово је збир две експоненцијално опадајуће функције ешења тако да кретање нема осцилаторни карактер т је <u>апериодично</u>. За $t \to \infty$ честица се зауставља равнотежном положају. При томе она или не пролази ли само једном не пролази кроз равнотежни положај што зависи од почетних услова.



б) $\omega=\beta$ - критично пригушење ... $=0$

је $\lambda_{1,2}=-\beta$. Опште решење гласи

$$\boxed{x(t)=C_1te^{-\omega t}+C_2e^{-\omega t}=e^{-\omega t}(C_1t+C_2)}$$

овде за $t\to\infty$ $x(t)\to 0$ као код јаког пригушења по другом закону.

„Ако r_i к-струки корен карактеристичне ј-не онда су xe^{r_ix}, $x^2e^{r_ix}$, ... $x^{k-1}e^{r_ix}$ такође решења диф. јне"

Линеарни хармонијски осцилатор са поремећајном силом

У том случају је диф. јна кретања-

$$\boxed{m\ddot{x}=-kx-z\dot{x}+F(t)};\quad \boxed{\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega^2x=f(t)},\quad \boxed{f(t)=\frac{1}{m}F(t)}$$

(t) је поремећајна сила која зависи од времена.

Добијена једначина је линеарна и нехомогена (њено решење се добија када се општем решењу хомогеног дела дода, јно, било које њено партикуларно решење). Партикуларно решење и самим тим кретање суштински зависе од ика $f(t)$.

Принудно осциловање. Резонанца.

- Од интереса је када пригушење слабо (или одсуствује) а поремећајна сила периодична функција времена.

Нека је $f(t)$ просто периодични ф-ја времена са фреквенцом Ω. Тада је

$$\boxed{\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega^2x=A_1\cos\Omega t+B_1\sin\Omega t.}\qquad (*)$$

Партикуларни интеграл можемо потражити у облику

$$x_p(t)=Q_1\cos\Omega t+R_1\sin\Omega t$$

одавде је

$$\dot{x}_p(t)=-Q_1\Omega\sin\Omega t+R_1\Omega\cos\Omega t$$

$$\ddot{x}_p(t)=-Q_1\Omega^2\cos\Omega t-R_1\Omega^2\sin\Omega t$$

Уврстимо ово у (*)

$$Q_1\Omega^2\cos\Omega t-R_1\Omega^2\sin\Omega t-2\beta Q_1\Omega\sin\Omega t+2\beta R_1\Omega\cos\Omega t+$$

$$+\omega^2Q_1\cos\Omega t+\omega^2R_1\sin\Omega t=A_1\cos\Omega t+B_1\sin\Omega t$$

Изједначавањем коефицијената уз $\cos\Omega t$ и $\sin\Omega t$ на левој и десној страни горње једначине добија се:

$$A_1=-Q_1\Omega^2+2\beta R_1\Omega+\omega^2Q_1=(\omega^2-\Omega^2)Q_1+2\beta\Omega R_1$$

$$B_1=-R_1\Omega^2-2\beta Q_1\Omega+\omega^2R_1=-2\beta\Omega Q_1+(\omega^2-\Omega^2)R_1$$

За овај систем једначина је

$$\Delta=(\omega^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2,\quad \Delta_1=(\omega^2-\Omega^2)A_1-2\Omega\beta B_1$$

$$\Delta_2=2\Omega\beta A_1+(\omega^2-\Omega^2)B_1$$

На тај начин се добија да је $Q_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $R_1=\frac{\Delta_2}{\Delta}$

Резултат је:

$$x_p(t) = \frac{(\omega^2-\Omega^2)A_1 - 2\Omega\beta B_1}{(\omega^2-\Omega^2)^2+4\Omega^2\beta^2}\cos\Omega t + \frac{2\Omega\beta A_1 + (\omega^2-\Omega^2)B_1}{(\omega^2-\Omega^2)^2+4\Omega^2\beta^2}\sin\Omega t$$

тако да опште решење има облик:

$$\boxed{x(t) = \underbrace{Ae^{-\beta t}\cos(\omega^* t+\delta)}_{\text{општи интеграл хомогене једначине - сопствене осцилације (у општем случају су пригушене)}} + \underbrace{\frac{(\omega^2-\Omega^2)A_1 - 2\Omega\beta_1 B_1}{(\omega^2-\Omega^2)^2+4\Omega^2\beta^2}\cos\Omega t + \frac{2\Omega\beta_1 A_1 + (\omega^2-\Omega^2)B_1}{(\omega^2-\Omega^2)^2+4\Omega^2\beta^2}\sin\Omega t}_{\text{принудне осцилације (осциловање фреквенцом принудне силе } \Omega\text{)}}}$$

Сопствене осцилације су значајне само у почетку ($t \leq \frac{1}{\beta}$) (када фактор $e^{-\beta t}$ не утиче битно на смањење амплитуде) доцније (за $t >> \frac{1}{\beta}$) амплитуда сопствених осцилација постаје занемарљива. Дакле након довољно дугог времена од почетка деловања покретачке силе, линеарни хармонијски осцилатор врши само принудно осциловање

Кретање при $t \leq \frac{1}{\beta}$ - <u>прелазни режим осциловања</u>

Кретање при $t >> \frac{1}{\beta}$ - <u>устаљени (стационарни) режим осц.</u>

Посебно је интересантна ситуација када је $\underline{\omega = \Omega}$ (фреквенција принудне силе једнака сопственој фреквенцији осцилатора). Тада горње опште решење постаје:

$$\boxed{(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega^* t+\delta) + \frac{1}{2\omega\beta}\left[-B_1\cos\omega t + A_1\sin\omega t\right]}$$

Ово се решење након истека прелазног режима ($t \leq \frac{1}{\beta}$) (када је $Ae^{-\beta t}\cos(\omega^* t+\delta) \approx 0$) своди на (водећи рачуна о томе да је $\cos(\omega t - \pi/2) = \cos\omega t \overset{\to 0}{\cos\pi/2} - \sin\omega t \overset{\to 1}{\sin\pi/2} = -\sin\omega t$
$\sin(\omega t - \pi/2) = \sin\omega t \cancelto{0}{\cos\pi/2} + \cos\omega t \sin\pi/2 = \cos\omega t$):

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\omega\beta}\left[A_1\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + B_1\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right]}$$

Пошто је β мало (ради се о слабо пригушеним осцилацијама) амплитуда ових осцилација је врло велика а њихово фазно кашњење у односу на покретачку силу је $\pi/2$. То је стање <u>резонанције</u>.

Ако је отпор средине занемарљив ($\beta = 0$) опште решење има облик

$$x(t) = A\cos(\omega t+\delta) + \frac{1}{\omega^2-\Omega^2}\left[A_1\cos\Omega t + B_1\sin\Omega t\right]$$

и у случају да је $\omega = \Omega$ амплитуда постаје бесконачна што је апсурдан резултат. У том случају партикуларно решење треба тражити у облику

$$x_p = t\,(Q_1'\cos\omega t + R_1'\sin\omega t)$$

при чему се коефицијенти Q_1' и R_1' одређују као у претходном случају.

Тада се за $\omega = \Omega$ (и $\beta = 0$) добија опште решење облика:

$$x(t) = A\cos(\omega t+\delta) + \frac{t}{2\omega}\left[A_1\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right) + B_1\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Из њега се види да у том случају кретање х. о. представља суперпозицију хармонијског осциловања на сопственој фреквенци ω и једног осц. кретања са истом фрекв. али чија амплитуда расте са временом и за $t\to\infty$ ова амплитуда постаје бесконачна.

Уколико поремећајна сила није просто периодична ф-ја времена, већ периодична са периодом P → развија се у ред у којем се појављују просто периодичне ф-је времена са основном фреквенцом $\Omega = \frac{2\pi}{P}$.

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\cos(n\Omega t) + B_n\sin(n\Omega t)\right]$$

а партикуларно решење се тражи у облику

$$x_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_{pn}(t)$$

где су $x_{pn}(t)$ партикуларна решења нехомогених линеарних диф. ј-на

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = A_n\cos(n\Omega t) + B_n\sin(n\Omega t) \qquad (n=0,1,2,\dots)$$

Овде је:

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega^* t+\delta) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\omega^2-n^2\Omega^2)A_n - 2n\Omega\beta B_n}{(\omega^2-n^2\Omega^2)^2+4n^2\Omega^2\beta^2}\cos(n\Omega t) +$$

$$+\frac{2n\Omega\beta A_n + (\omega^2-n^2\Omega^2)B_n}{(\omega^2-n^2\Omega^2)^2+4n^2\Omega^2\beta^2}\sin(n\Omega t)\quad,\ \beta\neq 0,\ \omega\neq s\Omega$$

Овде принудне осцилације нису просто периодичне, већ су описане периодичном ф-јом која има исти период као и поремећајна сила.

И овде је могућа резонанца и то не само ако је $\omega = \Omega$ већ уопште при $\omega = s\Omega$, за резонанцу на s-том хармонику поремећајне силе ($\omega = s\Omega$) горње решење има облик:

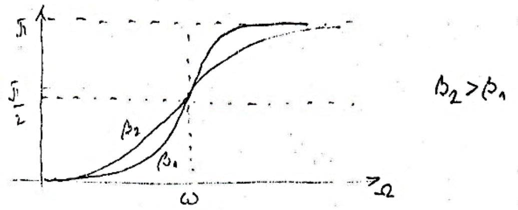
$$x(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega^* t+\delta) + \underbrace{\frac{1}{2\omega\beta}(-B_s\cos\omega t + A_s\sin\omega t)} +$$

$$+\frac{1}{\omega^2}\sum_{\substack{n=0\\ n\neq s}}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{n^2}{s^2}\right)A_n - 2\frac{n}{s}\frac{\beta}{\omega}B_n}{\left(1-\frac{n^2}{s^2}\right)^2+4\frac{n^2}{s^2}\frac{\beta^2}{\omega^2}}\cos\left(\frac{n}{s}\omega t\right) +$$

$$+\frac{1}{\omega^2}\sum_{\substack{n=0\\ n\neq s}}^{\infty}\frac{2\frac{n}{s}\frac{\beta}{\omega}A_n + \left(1-\frac{n^2}{s^2}\right)B_n}{\left(1-\frac{n^2}{s^2}\right)^2+4\frac{n^2}{s^2}\frac{\beta^2}{\omega^2}}\sin\left(\frac{n}{s}\omega t\right)$$

→ резонантни члан са великом ампл. (много већом од ампл. осталих

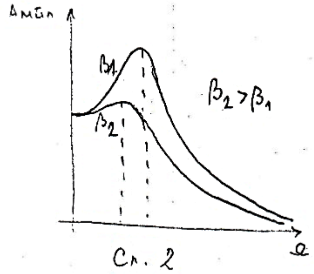
На слици 1 је приказана зависност фазног кашњења за различите вредности коефицијента пригушења. За $\omega = \Omega$ оно износи $\frac{\pi}{2}$. За $\beta = 0$ фазно кашњење



Сл. 1

износи 0 за $\Omega < \omega$ и износи π за $\Omega > \omega$.

На слици 2 приказана је зависност амплитуде принудних осцилација од фреквенце принудне силе при различ. вредностима коеф. пригуш.



Сл. 2

.

Drage kolege, materijal je za predavanja u trećoj nedelji vanrednog stanja zbog pandemije. Nemm pojma da li vam je ovo korisno, ali ako mislite da vam je korisnije da vam držim *on line* predavanja kažite. Lično smatram da je to teško realizovati zbog izvođenja jednačina. U svakom slučaju voleo bih da me upoznate sa vašim stavovima u vezi toga. Razmislite I o načinu realizovanja predispitnih aktivnosti. Javite mi.

Pozdravlja vas vaš profa Gaja i čuvajte se.